

۱- مقدار عبارت گویای $A = \frac{x^3 - 3\sqrt[3]{2}x^2 + 3\sqrt[3]{4}x - 1}{x^3 - 3\sqrt[3]{3}x^2 + 3\sqrt[3]{9}x - 1}$ به ازای $x = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}$ کدام است؟

○ ۸ (۴) ☒ ○ ۶ (۳) ○ ۴ (۲) ○ ۲ (۱)

$$A = \frac{(x - \sqrt[3]{2})^3 + 1}{(x - \sqrt[3]{3})^3 + 3} \xrightarrow{x} A = \frac{(\sqrt[3]{3})^3 + 1}{(\sqrt[3]{2})^3 + 3} = \frac{3+1}{2+3} = \frac{4}{5} = 0.8$$

۲- اگر $2a+2$ ، 11 و $a-4$ ، به ترتیب جملات چهارم، هفتم و نهم یک الگوی خطی باشند، چند جمله از این الگو مثبت است؟

۱۱ (۴) ۱۰ (۳) ۹ (۲) ☒ ۸ (۱)

$$\begin{aligned} a_n &= tn + b \rightarrow \begin{cases} 4t + b = 3a + 2 \\ 7t + b = 11 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3t = -3a + 9 \\ \rightarrow t = 3 - a \\ \rightarrow b = 7a - 10 \end{cases} \\ \rightarrow 9t + b &= 27 - 9a + 7a - 10 = a - 4 \rightarrow 17 - 2a = a - 4 \rightarrow 21 = 3a \rightarrow a = 7 \end{aligned}$$

$$\rightarrow a_n = 39 - 4n > 0 \rightarrow 39 > 4n \rightarrow n < 9.75 \rightarrow n \leq 9$$

۳- به ازای چند مقدار از a ، معادله درجه دوم $(x-2)^2 + 2a(x+1)^2 = a$ دارای یک ریشه مضاعف است؟

۴ (۴) ۳ (۳) ۲ (۲) ☒ ۱ (۱)

$$x^2 - 4x + 4 + 2ax^2 + 4ax + 2a = a \rightarrow (2a+1)x^2 + (4a-4)x + (a+4) = 0 ; a \neq -\frac{1}{2}$$

$$\rightarrow (4a-4)^2 = 4(a+4)(2a+1) \rightarrow 4(a-1)^2 = (a+4)(2a+1)$$

$$\rightarrow 4a^2 - 8a + 4 = 2a^2 + 9a + 4 \rightarrow 2a^2 = 17a \rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = \frac{17}{2} = 8.5 \end{cases}$$

۴- اگر α و β دو عدد حقیقی و متمایز باشند به طوری که $\alpha^2 = \alpha + 3$ و $\beta^2 = \beta + 3$ باشد، مقدار $\alpha^5 + \beta^5$ کدام است؟

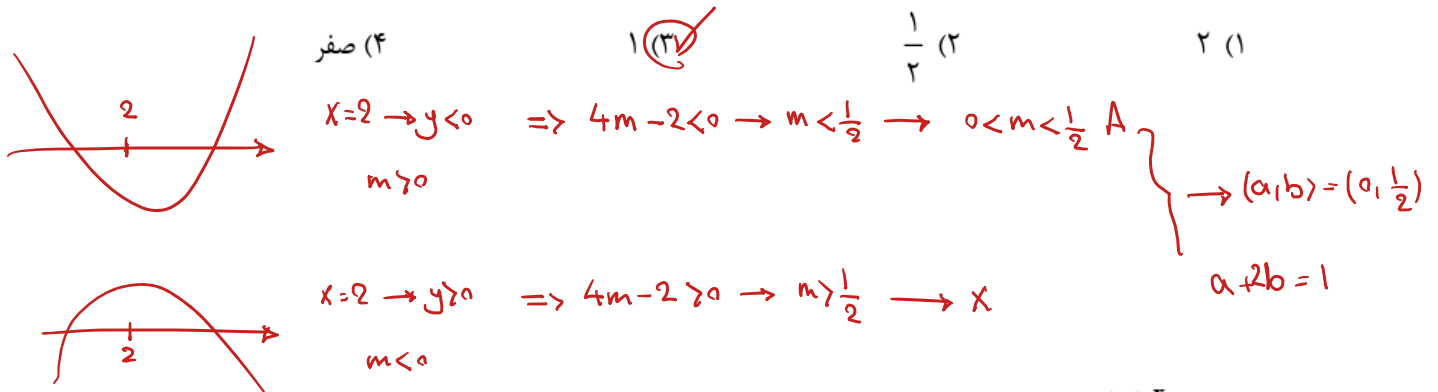
۷۹ (۴) ۷۳ (۳) ۶۷ (۲) ۶۱ (۱) ☒

$$\text{معادله: } x^2 = x + 3 \rightarrow x^2 - x - 3 = 0 \rightarrow S = 1, P = -3$$

$$\underbrace{(\alpha + \beta)^5}_1 = \underbrace{\alpha^5 + \beta^5}_X + 5\alpha^4\beta + 5\alpha\beta^4 + 10\alpha^3\beta^2 + 10\alpha^2\beta^3 = X + \underbrace{5\alpha\beta(\alpha^3 + \beta^3)}_{-3 \quad S^3 - 3PS} + \underbrace{10\alpha^2\beta^2(\alpha + \beta)}_{9 \quad 1+9=10}$$

$$\rightarrow 1 = X - 150 + 90 \rightarrow X = 61$$

۷- نمودار تابع $y = mx^2 - 2x + 4$ محور x ها را در دو طرف $x=2$ قطع می کند. اگر حدود تغییرات m بازه (a, b) باشد، مقدار $a+2b$ کدام است؟



۸- برای $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ اگر $f^{-1}(6-2x) \leq f^{-1}(2-x)$ باشد، حدود x شامل چند عدد صحیح مثبت است؟

$x \leq 4 \Rightarrow 4 \quad 3 \quad 2 \quad 1$
 $\rightarrow$ Φ^{-1} : Φ $\rightarrow$ Φ^{-1}

۹- اگر $27^y = 75^x = 125^{\frac{x}{y-x}}$ باشد، حاصل $\frac{x}{y-x}$ کدام است؟ ($x \neq 0$)

$125^{\frac{x}{y-x}} = 5^{\frac{3x}{y-x}}$
 $75^x = 3^x \cdot 5^{2x}$
 $27^y = 3^{3y}$

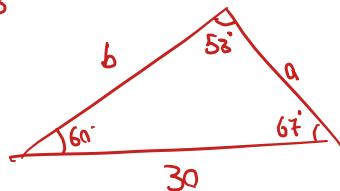
$5^{\frac{3x}{y-x}} = 3^x \cdot 5^{2x} \Rightarrow 5^{\frac{3x}{y-x}} = 5^{2x} \cdot 3^x \Rightarrow 5^{\frac{3x}{y-x} - 2x} = 3^x \Rightarrow 5^{\frac{x}{y-x}} = 3^x \Rightarrow 125^{\frac{x}{3y-x}} = \sqrt{3^3} = 3\sqrt{3}$

$\sin 53^\circ = 0.8$

۱۰- اگر طول یک ضلع مثلثی 30° و اندازه دوزاویه مجاور آن ضلع 60° و 67° باشد، محیط مثلث کدام است؟ ($\cos 53^\circ = 0.6$)

$45 + 40\sqrt{3} \quad (4) \quad 45 + 30\sqrt{3} \quad (3) \quad 30 + 40\sqrt{3} \quad (2) \quad 30 + 30\sqrt{3} \quad (1)$

$\rightarrow a+b+30 = 45 + \frac{240}{8}\sqrt{3}$



$\frac{30}{\sin 53} = \frac{a}{\sin 60} \rightarrow \frac{300}{8} = \frac{2a}{\sqrt{3}} \rightarrow \frac{150}{8}\sqrt{3} = a$

$\sin 67^\circ = \sin 113^\circ = \sin(53^\circ + 60^\circ) = \sin 53^\circ \cos 60^\circ + \cos 53^\circ \sin 60^\circ$
 $= 0.8 \times \frac{1}{2} + 0.6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.4 + 0.3\sqrt{3}$

$\frac{30}{\sin 53} = \frac{b}{\sin 67} \rightarrow \frac{300}{8} = \frac{10b}{4\sqrt{3}} \rightarrow b = 15 + \frac{90}{8}\sqrt{3}$

11- اگر $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ و $\cos \beta = -\frac{12}{13}$ و انتهای کمان α در ربع اول و انتهای کمان β در ربع دوم قرار داشته باشد،
 $\sin \gamma > 0$ $\cos \gamma < 0$ $\sin \gamma > 0$ $\cos \gamma < 0$



انتهای زاویه‌های $\alpha + \beta$ و 2β به ترتیب در کدام ربع‌ها قرار دارند؟

(1) دوم و سوم (2) سوم و سوم (3) دوم و چهارم (4) سوم و چهارم

$$\sin 2\beta = 2 \sin \beta \cos \beta = \frac{12}{13} \times \frac{-12}{13} = \frac{-144}{169} < 0$$

$$\cos 2\beta = \cos^2 \beta - \sin^2 \beta = \frac{144}{169} - \frac{25}{169} = \frac{119}{169} > 0$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{4}{5} \times \frac{12}{13} + \frac{3}{5} \times \frac{5}{13} = \frac{16}{65} > 0$$

$$\cos(\alpha + \beta) = -\frac{48}{65} - \frac{15}{65} < 0$$

ربع دوم

ربع سوم

12- معادله مثلثاتی $\frac{\sqrt{3} + \tan x}{1 + \sqrt{3} \cot x} = \tan 4x$ چند جواب در بازه $[-2\pi, 2\pi]$ دارد؟

(1) 4 (2) 7 (3) 8 (4) 13

$$\rightarrow \frac{\tan x (\sqrt{3} + \tan x)}{\tan x + \sqrt{3}} = \tan 4x \rightarrow \tan x = \tan 4x \text{ و } \tan x \neq -\sqrt{3}$$

$$\rightarrow 4x = k\pi + x \rightarrow x = \frac{k}{3}\pi \rightarrow -2\pi, -\frac{5}{3}\pi, -\frac{4}{3}\pi, -\pi, -\frac{2}{3}\pi, -\frac{\pi}{3}, 0, \frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi, \pi, \frac{4}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi, 2\pi$$

$$\rightarrow \tan x \neq \tan \frac{\pi}{3} \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{3} \rightarrow -\frac{5}{3}\pi, -\frac{2}{3}\pi, \frac{\pi}{3}, \frac{4}{3}\pi$$

13- اگر $f(x) = 1 - \sqrt{x}$ و $g(x) = [1 - x]$ باشد، به ازای چند مقدار صحیح a ، $\lim_{x \rightarrow a^+} f \circ g(x) = 1 + a$ است؟

$x \rightarrow a^+$

(4) 4

(3) 3

(2) 2

(1) 1

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f \circ g(x) = f(\lim_{x \rightarrow a^+} g(x)) = 1 + a \rightarrow \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = (1 - 1 - a)^2 = a^2 \in \mathbb{Z}$$

$$\rightarrow \begin{cases} 1 - a = a^2 \rightarrow a^2 + a - 1 = 0 \rightarrow a = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \text{ و } a = \frac{-\sqrt{5}-1}{2} \\ -a = a^2 \rightarrow a = 0 \text{ و } a = -1 \end{cases}$$

14- حاصل $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\cos 2\pi x - 1}{x + 2\sqrt{-x} - 1}$ کدام است؟

(4) $8\pi^2$

(3) $4\pi^2$

(2) $2\pi^2$

(1) صفر

$$\frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-2\pi \sin 2\pi x}{1 - \frac{1}{\sqrt{-x}}} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-4\pi^2 \cos 2\pi x}{\frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}}} = 8\pi^2$$

۱۵- برای تابع $f(x) = \frac{1-2x}{6x^2+x+a}$ اگر $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x)$ موجود و مخالف صفر باشد، مقدار $\lim_{x \rightarrow -\frac{2}{3}} \frac{3x+2}{|x-a|} \times f(x)$ کدام است؟

$$9\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2} + a = 0 \rightarrow a = -2$$

(۱) صفر (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $-\frac{3}{4}$ (۴) وجود ندارد

$$\phi(x) = \frac{1-2x}{6x^2+x-2} = \frac{(1-2x)}{(1-2x)(-2-3x)} = \frac{-1}{3x+2} \rightarrow \lim_{x \rightarrow -\frac{2}{3}} \frac{3x+2}{|x+2|} \cdot \frac{-1}{3x+2} = \frac{-1}{\frac{4}{3}} = -\frac{3}{4}$$

۱۶- اگر $f(x) = a(1-x)(x+1) - bx^2$ یک تابع چندجمله‌ای از درجه صفر باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{xf(x)}{x+b}$ کدام است؟

(۱) $-\infty$ (۲) $+\infty$ (۳) صفر (۴) وجود ندارد

$$\phi(x) = -ax^2 + a - bx^2 = -(a+b)x^2 + a \rightarrow a = -b$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{x\phi(x)}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{ax}{x-a} = \frac{a^2 > 0}{0^-} = -\infty$$

۱۷- اگر حد چپ تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{x^2 + |x|}{x^2 + b|x|}$ در $x = a$ برابر $-\infty$ باشد، تابع f چند مجانب قائم دارد؟

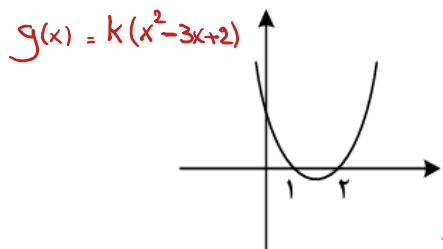
(۱) ۳ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) صفر

$$\phi(x) = \frac{|x|(1+|x|)}{|x|(x+b)} = \frac{|x|+1}{|x|+b} \quad \lim_{x \rightarrow a^-} \phi(x) = -\infty \rightarrow |a|+b = 0^- \rightarrow b = -|a|$$

$$a > 0 \rightarrow b = -a \rightarrow \phi(x) = \frac{|x|+1}{|x|-a} \rightarrow \begin{matrix} x = \pm a \\ y = 1 \end{matrix}$$

۱۸- نمودار تابع $y = g(x)$ در زیر رسم شده است. برای تابع f با ضابطه $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = -\infty, f(x) = \begin{cases} g(x) & x \neq a \\ g(0) & x = a \end{cases}$

است. اگر بازه (b, c) حدود تغییرات a باشد، کدام است؟



$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{g(x) - g(0)}{x - a} = -\infty$$

۱ (۱)

۲ (۲)

۳ (۳) ✓

۴ (۴)

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{kx^2 - 3kx}{x - a} = -\infty$$

$$ka^2 - 3ka < 0$$

$$a^2 - 3a < 0 \rightarrow 0 < a < 3$$

$$\rightarrow \begin{cases} h=0 \\ c=3 \end{cases}$$

$$y' = -\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}$$

۱۹- اگر α زاویه خط مماس بر نمودار تابع $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ در نقطه $(-1, -1)$ با جهت مثبت محور x ها باشد، حاصل عبارت

$A = 3\sin\alpha + 4\cos\alpha$ کدام است؟

$$-0.3\sqrt{10} \quad (۴)$$

$$-0.9\sqrt{10} \quad (۳) \checkmark$$

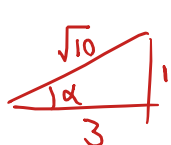
$$0.3\sqrt{10} \quad (۲)$$

$$0.9\sqrt{10} \quad (۱)$$

$$\tan \alpha = y' = -\frac{1}{3} \quad (۱) = -\frac{1}{3} \rightarrow 90^\circ < \alpha < 180^\circ$$

$$A = \sqrt{10}(0.3 - 1.2)$$

$$= -0.9\sqrt{10}$$



$$\rightarrow \begin{cases} \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{10}} = 0.1\sqrt{10} \\ \cos \alpha = -\frac{3}{\sqrt{10}} = -0.3\sqrt{10} \end{cases}$$

۲۰- تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} 3x+1 & x \geq 1 \\ x^3+1 & x < 1 \end{cases}$ داده شده است. کدام مورد در خصوص مشتقات یک طرفه f در $x=1$ ، درست است؟ $f(1) = 4$

$$f'_+(1) = +\infty \quad (۴)$$

$$f'_+(1) = -\infty \quad (۳)$$

$$f'_-(1) = +\infty \quad (۲) \checkmark$$

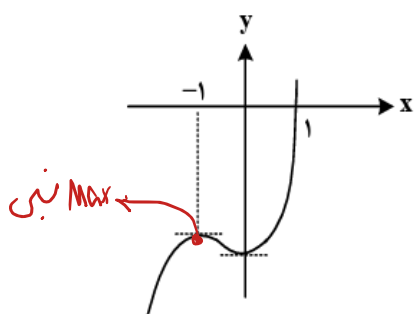
$$f'_-(1) = 3 \quad (۱)$$

$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3x - 3}{x - 1} = 3$$

$$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3 - 3}{x - 1} = \frac{-2}{0^-} = +\infty$$

$$\phi' = 3ax^2 + 2bx + c$$

۲۱- نمودار تابع f با ضابطه $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx - 5$ در زیر رسم شده است. عرض نقطه ماکزیمم نسبی تابع f ، کدام است؟



$$\phi(1) = 0 \rightarrow a + b + c = 5$$

$$-4 \text{ (۱۷)}$$

$$\phi'(0) = 0 \rightarrow c = 0$$

$$-3 \text{ (۲)}$$

$$\phi'(-1) = 0 \rightarrow 3a = 2b$$

$$-\frac{5}{2} \text{ (۳)}$$

$$\rightarrow a + \frac{3}{2}a + 0 = 5 \rightarrow a = 2$$

$$-\frac{7}{2} \text{ (۴)}$$

$$b = 3$$

$$c = 0$$

$$\rightarrow \phi(x) = 2x^3 + 3x^2 - 5$$

$$\phi(-1) = -2 + 3 - 5 = -4$$

$$y' = -2x$$

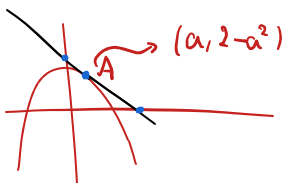
۲۲- در نقطه A از نمودار سهمی $y = 2 - x^2$ واقع در ناحیه اول، مماسی رسم می‌کنیم که مماس رسم شده همراه با محورهای مختصات، مثلثی با مساحت مینیمم می‌سازد. عرض نقطه A کدام است؟

$$\frac{2}{3} \text{ (۴)}$$

$$\frac{4}{3} \text{ (۳)}$$

$$\frac{3}{4} \text{ (۲)}$$

$$\frac{5}{4} \text{ (۱)}$$



$$m_{\text{خط}} = -2a \rightarrow \text{معادله: } y = a^2 + 2 - 2ax$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} a^2 + 2 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 0 \quad \frac{a^2 + 2}{2a} \end{array} \quad \rightarrow S = \frac{(a^2 + 2)^2}{4a}$$

$$\rightarrow S' = \frac{4a(a^2 + 2)(4a) - 4(a^2 + 2)^2}{16a^2} = 0 \rightarrow 16a^2(a^2 + 2) = 4(a^2 + 2)^2 \rightarrow 4a^2 = a^2 + 2$$

$$\rightarrow a^2 = \frac{2}{3}$$

$$\rightarrow y_A = 2 - a^2 = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

Arman Tahvilian